抽象代数期末模拟

1. (20 分, 每小题 2 分) 判断下列断言是否为真 (**不需证明**).

   (a) 若多项式 $f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ 在 $\mathbf{Q}$ 的某个扩张中是不可约多项式, 则 $f(X)$ 是不可约多项式.

   (b) 17 阶群一定是循环群.

   (c) 只有有限个互不同构的 $\mathbf{Q}$ 的 2 次扩张.

   (d) 表现矩阵
   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$
   决定了 $\mathbf{Z}$ 上的一个自由模.

   (e) 诺特环的商环仍然是诺特环.

   (f) 设 G 是群, G_1 是 G 的一个正规子群, G_2 是 G_1 的一个正规子群. 则 G_2 是 G 的正规子群

   (g) $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ 是唯一分解整环.

   (h) 给定环 R. 秩相等的自由 R-模一定同构.

   (i) 特征 p 的域一定是有限的.

   (j) 任何有限 Galois 扩张 K/F 都是一个 F-系数不可约多项式的分裂域.

2. (15 分) 分类一切阶数等于 16 的 Abel 群 (只需写下所有的同构类, **不需证明**).

3. (20 分, 每小题 10 分) 令 R 是一个含幺交换环. 令 M 为一个 R-模. M 的**歼灭子** (Annihilator) 是指集合 $\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R : rv = 0, \forall v \in M\}$.

   (a) 记号如上. 证明 $\mathrm{Ann}(M)$ 是 R 的一个理想.

   (b) 求 $\mathbf{Q}[t]$-模
   $$\frac{\mathbf{Q}[t]}{(t^2-3t-2)} \times \frac{\mathbf{Q}[t]}{(t^2-4t-3)}$$
   的歼灭子.

4. (10 分) 分类 15 阶群.

5. (10 分) 设 K/F 是有限 Galois 扩张. p 是一个整除 $[K:F]$ 的素数. 证明存在中间域 L, 使得 $[K:L]=p$.

6. (20 分) 一个复数 α 叫做一个**代数整数**, 如果存在正整数 n, 和整数 $a_1, \ldots, a_n$, 使得
   $$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

   (a) (10 分) 设 $\alpha \in \mathbf{C}$ 是代数整数. 设 K 是 $P_\alpha(X)$ 的分裂域, $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$. 令 $G\cdot\alpha = \{\sigma(\alpha) : \sigma \in G\}$. 对任意正整数 m, 证明多项式 $\prod_{\beta\in G\cdot\alpha}(X-\beta^m)$ 是整系数多项式.

   (b) (10 分) 设 α 是一个代数整数. 若对任意 $\beta \in G\cdot\alpha$, 都有 $|\beta| = 1$, 证明 α 是一个单位根.

7. (15 分, 每小题 5 分) **阅读理解题**.

一个**微分域**是指一个偶对 (K,∂), 其中 K 是域, ∂ 是一个从 K 到自身的映射, 且对一切 $a,b\in K$, 下述性质成立: $\partial(ab)=a\partial(b)+b\partial(a)$, $\partial(a+b)=\partial(a)+\partial(b)$.

一个 (K,∂) 上的 (有限) **微分模**是一个偶对 (V,D), 其中 V 是一个有限维 K-线性空间, D 是 V 到自身的的一个映射, 且对一切 $v,w\in V$, $a\in K$, 下述性质成立: $D(v+w)=D(v)+D(w)$, $D(av)=aD(v)+\partial(a)v$.

显然 (K,∂) 可以看作它自己上面的微分模.

若 (V_1,D_1), (V_2,D_2) 是两个 (K,∂) 上的微分模, 一个 K-线性映射 $f:V_1\to V_2$ 叫做**微分同态**, 如果 $f(D_1(v))=D_2(f(v))$, 对一切 $v\in V_1$ 成立. (V_1,D_1) 与 (V_2,D_2) 之间的一切微分同态用记号 $\mathrm{Hom}_\partial((V_1,D_1),(V_2,D_2))$ 来表示. 一个微分同态如果是一一对应, 就称它为**微分同构**.

(a) 解释为何 $\mathrm{Hom}_\partial((V_1,D_1),(V_2,D_2))$ 具有一个自然的 Abel 群结构.

(b) 若 (V,D) 是 (K,∂) 上的微分模, 证明 $\mathrm{Hom}_\partial((V,D),(K,\partial))$, 作为 Abel 群, 同构于 $\mathrm{Coker}(D)$, 证明 $\mathrm{Hom}_\partial((K,\partial),(V,D))$, 作为 Abel 群, 同构于 $\mathrm{Ker}(D)$.

微分域有如下例子:

- $K=\mathbf{C}(t)$ (单变量有理函数域), $\partial=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$
- $K=\mathbf{C}((t))$ (形式幂级数环 $\mathbf{C}[[t]]$ 的分式域). $\partial=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$

对上述两个微分域, 定义微分模 $\mathscr{E}$ 如下: $\mathscr{E}$ 的线性空间是一维线性空间 K, 映射 D 定义为 $D(f)=\mathrm{d}f/\mathrm{d}t+f$.

(c) 对上述两个微分域, 判断 $\mathscr{E}$ 是否微分同构于 (K,∂).