

1. 分类所有 8 阶 Abel 群.
2. 证明所有 16 阶群都有一个 8 阶正规子群.
3. 是否存在一个无限群, 它的任何真子群都是有限的?
4. 是否存在一个无限群, 它关于任何非平凡子群的商群都是有限的?
5. 令 p 是任意的素数. 证明任何有限群都可以实现为某个 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 的子群.
6. 什么是单群? $\mathrm{SO}(4)$ 是单群吗? 若 k 是域, $\mathrm{SL}_4(k)$ 是单群吗?
7. 如果 G 是一个群. 它的子群 H 的正规化子的定义是什么? 求 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的子群 $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 的正规化子 N . 描述商群 N/U .
8. 设 G 是一个群. 令 S 为 G 的一个 Sylow p -子群. 令 H 为 G 的子群. 求证: 存在 $g \in G$, 使得 $gSg^{-1} \cap H$ 是 H 的 Sylow p -子群.
9. 什么是环的理想? 定义两个理想的和. 理想的并是否理想?
10. 主理想 $(3 + \sqrt{-5})$ 是否 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的素理想?
11. 令 $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$. 定义 $I_{\mathbb{Q}}(\zeta) = \{f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] : f(\zeta) = 0\}$. 证明 $I_{\mathbb{Q}}(\zeta)$ 是 $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ 的素理想. 它一定是极大理想吗?
12. 令 $C([0, 1])$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数环. 它是整环吗?
13. 令 $\mathcal{A}(0, 1)$ 为开区间 $(0, 1)$ 上的解析函数环. 它是整环吗?
14. Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 是唯一分解整环吗?