清华大学考试试题专用纸

考试课程: 拓扑学　　　　姓名: ____________

- 考试时间: 2020 年 06 月 22 日 (星期二) 下午 2:30 – 4:30.
- 除非题目有相反的要求, 所有的解答请写出必要的细节和推理过程. 特别地, 解答过程中请不要使用 “显然”, “平凡”, “trivial”, “obvious” 等类似词汇.

1. **[共 25 分, 每小题 5 分]**
   (a) 写下流形的定义 (注意: 我们总要求流形是有可数拓扑基的).
   (b) 判断下面空间是否流形 (赋予标准拓扑的子空间拓扑):
   - $X_1 = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$.
   - $X_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^3 = 0\}$.

   简要地解释你的理由.
   (c) 写下纤维积 (fiber product) 的定义 (不必证明).
   (d) 举例说明, 流形上具有离散结构群的旋子 (torsor) 未必是 Galois 覆盖.
   (e) 令 Σ 为向 $\mathbf{S}^2$ 添加两个环柄而得到的闭曲面. 是否存在从 Σ 到 $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ 的覆盖映射? (只需回答 “是” 或 “否”, 不必给出证明或反例.)

2. **[共 15 分, 每小题 5 分]**
   设 n 是正整数. 设 B 是连通且局部连通的拓扑空间. 设 (X,q) 是 B 上的 n 层连通覆盖空间.
   (a) 证明 $\operatorname{Card}\operatorname{Aut}_B(X,q) \le n$.
   (b) 证明上题中等号成立当且仅当 (X,q) 为 Galois 覆盖.
   (c) 如果去掉 X 的连通性, (2a) 中命题还正确吗?

3. **[共 25 分]**
   设 $n \ge 1$ 为正整数. 令 X 为 “具有三个原点的 n 维仿射空间”, 即
   $$X = \frac{\mathbf{R}^n \times \{0,1,2\}}{(x,i) \sim (x,j), \forall x \neq 0, \forall i,j = 0,1,2}.$$
   这里, $\{0,1,2\}$ 具有离散拓扑, $\mathbf{R}^n$ 具有标准拓扑.
   (a) X 是否 Hausdorff 空间? (只需写 “是” 或 “否”, 不必证明.) [5 分]
   (b) 证明 X 连通, 任何开集都是可缩开集的并, 且道路连通. [10 分]
   (c) 对任意 $x \in X$, 计算 $\pi_1(X,x)$. [10 分]

4. **[共 25 分, 每小题 5 分]** 考虑由一切形如 $\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ & 1 & z_2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 的 3 乘 3 复矩阵构成的集合 G. 利用双射

$$\mathbf{C}^3 \leftrightarrow G, \quad (z_1, z_2, z_3) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ & 1 & z_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

和 $\mathbf{C}^3$ 的标准拓扑赋予 G 拓扑. 在此拓扑以及矩阵乘法之下, G 是一个拓扑群.

- 定义 $\mathbf{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b \in \mathbf{C} : a, b \in \mathbf{Z}\}$. 令 $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}[\mathrm{i}])$ 为分量属于 $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$, 且其逆矩阵分量也属于 $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ 的可逆 3 阶复方阵的全体.
- 令 $\Gamma = G \cap \mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}[\mathrm{i}])$.

则 Γ 在 G 有如下左作用: $(\gamma, g) \mapsto \gamma \cdot g$ (矩阵相乘). 记商空间 ${}_\Gamma\backslash G$ 为 X. 令 $q \colon G \to X$ 为商映射. X 叫做**岩泽流形** (Iwasawa manifold)

(a) 如果 $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$ 在对应 $(*)$ 下分别对应于 (w_1, w_2, w_3), (z_1, z_2, z_3), 验证 $\gamma \cdot g$ 对应于 $(z_1 + w_1, z_3 + w_1 z_2 + w_3, z_2 + w_2)$.

(b) 证明 X 是六维流形.

(c) 计算 $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$.

(d) 赋予 $\mathbf{C}$ 标准拓扑. 将 $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ 看作加法群 $\mathbf{C}$ 的子群. 令 E 为商空间 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$. 证明 $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, z_3)$ 诱导了连续映射 $\pi \colon X \to E \times E$, 且它的纤维都同胚于 E.

(e) 是否存在连续映射 $s \colon E \times E \to X$, 满足 $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E \times E}$?

5. **[共 10 分]**

存在多少幂级数 $u(\varepsilon) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$ 满足下面两条性质?

- $u(0) = 1$,
- $u(\varepsilon)^5 + \varepsilon u(\varepsilon) = 1$.

若存在这样的幂级数 u, 求 u 的收敛半径.

[**也许与问题有关的信息**. 你可以自由地使用如下定理.

定理 (Cauchy). 令 $\Delta_r = \{z \in \mathbf{C} : |z| < r\}$. 设连续函数 $f \colon \Delta_r \to \mathbf{C}$ 满足如下性质: 对任意 $z_0 \in \Delta_r$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在. 则存在复数 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 使得 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 对一切 $z \in \Delta_r$ 都成立. 特别地, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 Δ_r 上逐点收敛.]