2020 − 2021 春学期 拓扑学 期中考试

姓名: ____________ 　　学号: ____________

第 1 题	第 2 题	第 3 题	第 4 题	第 5 题	第 6 题	第 7 题	**总 分**

1. (15 分). 令 $\mathrm{S}=\{o,\eta\}$ 为 Sierpiński 空间, 即 S 的开子集为 $\{\emptyset,\{\eta\},\mathrm{S}\}$. 令 X 为任意拓扑空间. 证明它的子集 A 为闭子集的必要且充分条件是存在连续映射 $f\colon \mathrm{X}\to\mathrm{S}$ 使得 $\mathrm{A}=f^{-1}(\{o\})$.

2. (15 分). 设 X 是紧拓扑空间, Z 是任意拓扑空间. 证明投影映射

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{Z}} : \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}, \quad (x, z) \mapsto z$$

是闭映射.

3. (15 分). 证明

$$\mathbf{R}^3 - \Big(\{(x,0,0)\in\mathbf{R}^3 : x\in\mathbf{R}\}\cup\{(0,y,0)\in\mathbf{R}^3 : y\in\mathbf{R}\}\Big)$$

是道路连通的. 它是否可缩? 证明你的结论.

4. (15 **分**). 设 γ 和 δ 都是从 $\mathbf{S}^1$ 到 $\mathbf{R}^2-\{0\}$ 的连续映射, 并且对任何 $a \in \mathbf{S}^1$, 连结 $\gamma(a)$ 与 $\delta(a)$ 的线段不经过原点. 证明 γ 与 δ 是同伦的.

5. (每小题 10 分, 共 20 分). 设 (X, d) 为度量空间. 我们称 X 为 Cantor **连通**空间, 如果它满足如下性质: 对任意 $x, y \in \mathrm{X}$, 任意正数 $\varepsilon > 0$, 存在有限序列 $x_1, \ldots, x_n$, 满足 (i) $x = x_1, x_n = y$, (ii) 对任意 $1 \leq i \leq n-1$, 有 $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$. 比如, 实数空间 $\mathbf{R}^n$ 关于它的标准度量就是 Cantor 连通的.

1) 证明如果度量空间 X 连通, 那么它 Cantor 连通.

2) 证明紧的 Cantor 连通度量空间是连通的. 如果不紧呢?

6. 判断下列断言是否正确, 不需给出证明或反例 (每小题 3 分, 共 30 分).

[__] Hausdorff 空间中的单点集是闭的.

[__] 一维 (无边) 流形之间的连续单射一定是局部同胚.

[__] 设 f, g 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射, A 是 X 的稠密子空间. 如果 $f|_{\mathrm{A}} = g|_{\mathrm{A}}$, 则 $f = g$.

[__] 非空的道路连通空间都是连通的.

[__] 令 K, L 为拓扑空间 X 的紧子空间. 那么 $\mathrm{K} \cap \mathrm{L}$ 也是紧的.

[__] 商映射的复合仍然是商映射.

[__] 如果连续映射 $r\colon \mathrm{X} \to \mathrm{A}$ 和 $\iota\colon \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ 满足 $r \circ \iota = \mathrm{Id}_{\mathrm{A}}$, 则 r 是商映射.

[__] 如果 U 是 X 的开子空间, U 的基本群非平凡, 那么 X 的基本群也非平凡.

[__] 设 $\mathrm{X} \subset \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3\}$ 是紧子空间, $v = (0, 0, 1)$, $[vx]$ 代表连结 v 和 x 的线段 (包括端点). 那么 $\bigcup_{x \in \mathrm{X}} [vx]$ 同胚于商空间 $(\mathrm{X} \times [0, 1])/(\mathrm{X} \times \{1\})$.

[__] 定义 $\mathbf{R}^2$ 的 "铁路度量" 如下:

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|, & \text{如果 } x, y \text{ 决定的直线经过原点;} \\ \|x\| + \|y\|, & \text{否则.} \end{cases}$$

则 $\mathbf{R}^2$ 在铁路度量诱导的拓扑下是可缩的.