1. **[共 25 分, 每小题 5 分]**

   (a) 写下 Galois 覆盖和旋子 (torsor) 的定义.

   (b) 判断下面空间是否流形 (赋予标准拓扑的子空间拓扑):

   - $X = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2=0, z \geq 0\}$,
   - $X = \{[x,y,z] \in \mathbf{C}\mathrm{P}^2 : y^2z = x^3+z^3\}$.

   请大致解释你的断言为何成立, 不必给出全部细节.

   (c) 写下紧开拓扑的定义.

   (d) 证明, 连通且局部连通空间上的任何 Galois 覆盖都是以其 Galois 群 (赋予离散拓扑) 为结构群的旋子 (torsor).

   (e) 是否存在从 Klein 瓶到 $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ 的覆盖映射? 是否存在从 $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ 到 Klein 瓶的覆盖映射? (只需回答 "是" 或 "否", 不必给出证明.)

2. **[共 25 分]** 考虑映射 $\pi\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \mathbf{C}\mathrm{P}^1$, $\pi(x,y) = [x,y]$. 设 $q \in \mathbf{C}$, $0 < |q| < 1$. 定义 $\mathbf{Z}$ 在 $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ 上的作用如下:
$$n \cdot (x,y) = (q^n x, q^n y).$$
令 X 为商空间 $(\mathbf{C}^3 - \{0\})/\mathbf{Z}$, 令 u 为商映射.

   (a) 证明, 存在唯一的连续映射 $p\colon X \to \mathbf{C}\mathrm{P}^1$, 使得下图
$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathbf{C}\mathrm{P}^1 \\ & X \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$
   交换. [5 分]

   (b) 证明 (X,p) 是 $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ 上的局部平凡纤维空间. [5 分]

   (c) 计算 X 的基本群. [10 分]

   (d) 是否存在连续映射 $s\colon \mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to X$ 满足 $p \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}\mathrm{P}^1}$? [5 分]

3. **[共 25 分]** 设 F 为紧连通流形, $\varphi\colon F \to F$ 为同胚. 定义 M_φ 为商空间
$$\frac{F \times [0,1]}{(x,0) \sim (\varphi(x),1)}.$$
令 $\pi\colon F \times [0,1] \to M_\varphi$ 为商映射; 令 $q\colon [0,1] \to \mathbf{S}^1$ 为粘合 $0,1$ 的商映射.

   (a) 证明存在唯一的连续映射 $p\colon M_\varphi \to \mathbf{S}^1$, 使得下图交换:
$$\begin{tikzcd} F \times [0,1] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & M_\varphi \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "q"] & \mathbf{S}^1 \end{tikzcd}.$$
   [5 分]

(b) 证明 $F\times[0,1]$ 同胚于纤维积 $[0,1]\times_{\mathbf{S}^1} M_\varphi$. [10 分]

(c) 证明, 若 $\pi_1(F)=\langle x_1,\dots,x_n \mid r_1,\dots,r_k\rangle$, 则

$$\pi_1(M_\phi)=\langle x_1,\dots,x_n,t \mid r_1,\dots,r_k, x_1t^{-1}\varphi_*(x_1)^{-1}t,\dots,x_nt^{-1}\varphi_*(x_n)^{-1}t\rangle$$

这里 $\varphi_*\colon \pi_1(F)\to\pi_1(F)$ 是 φ 在基本群上诱导的同态. [10 分]

4. **[共 15 分, 每小题 5 分]**

对 $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{C}^n$, 令 $P_a(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$. 考虑下面的空间:

$$\begin{aligned}
B&=\{a\in\mathbf{C}^n : P_a(x)\ \text{无重根}\},\\
X&=\{(a,x)\in B\times\mathbf{C} : P_a(x)=0\},\\
E&=\{(t_1,\dots,t_n)\in\mathbf{C}^n : t_i\neq t_j, \forall i\neq j\},
\end{aligned}$$

以及连续映射

$$\begin{aligned}
q\colon X\to B,&\quad q(a,x)=a,\\
p\colon E\to B,&\quad p(t)=(\sigma_1(t),\dots,\sigma_n(t)).
\end{aligned}$$

其中 $\prod_{i=1}^n(x-t)=\sum_{i=0}^n\sigma_i(t)x^{n-i}$.

(a) 证明 p,q 都是覆盖映射.

(b) 证明 E 是 Galois 覆盖.

(c) 证明 $E\times_B X$ 可平凡化.

5. **[共 10 分]**

令 $X=\{(x,y,t)\in\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}^* : y^2+x^3=t\}$. 计算 $\pi_1(X)$.